

*Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
Μια εισαγωγή*

Μερικές διαφορικές εξισώσεις. Μια εισαγωγή
2η έκδοση
Copyright © 2017 Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π.

Πρωτότυπη έκδοση:
Walter A. Strauss, *Partial Differential Equations*
2nd edition

Copyright © 2008, John Wiley & Sons, Inc.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in retrieval system or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, scanning or otherwise, except as permitted under Sections 107 or 108 of the 1976 United States Copyright Act, without either the prior written permission of the Publisher, or authorization through payment of the appropriate per-copy fee to the Copyright Clearance Center, Inc., 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923, website www.copyright.com. Requests to the Publisher for permission should be addressed to the Permissions Department, John Wiley & Sons, Inc., 111 River Street, Hoboken, NJ 07030-5774, (201)748-6011, fax (201)748-6008, website <http://www.wiley.com/go/permissions>.

Μετάφραση

Θεοφάνης Γραμμένος, *Επίκουρος Καθηγητής Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας*

Ανδρομάχη Σπανού, *Διδάκτωρ Φυσικός Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.*

Επιστημονική επιμέλεια

Δρόσος Γκιντιδης, *Αναπληρωτής Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.*

Κυριακή Κυριάκη, *Καθηγήτρια Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.*

Ηλεκτρονική επεξεργασία - επιμέλεια

Ανδρομάχη Σπανού, *Διδάκτωρ Φυσικός Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.*



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ Ε.Μ.Π.

Θωμάϊδειο Κτήριο Εκδόσεων

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 157 80 Ζωγράφου

Τηλ.: 210 772 2578, fax: 210 772 1127

e-mail: ntuapres@central.ntua.gr

www.ntua.gr/ntuapres

ISBN: 978-960-254-702-1

Walter A. Strauss
Brown University

Μερικές
Διαφορικές Εξισώσεις
Μια εισαγωγή

Μετάφραση

Θεοφάνης Γραμμένος

*Επίκουρος Καθηγητής Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας*

Ανδρομάχη Σπανού

*Διδάκτωρ Φυσικός Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.*

Επιστημονική επιμέλεια

Δρόσος Γκιντίδης

Αναπληρωτής Καθηγητής ΣΕΜΦΕ Ε.Μ.Π.

Κυριακή Κυριάκη

Καθηγήτρια ΣΕΜΦΕ Ε.Μ.Π.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ Ε.Μ.Π.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η κατανόηση που διαθέτουμε για τις θεμελιώδεις διαδικασίες του φυσικού κόσμου βασίζεται σε μεγάλο βαθμό σε μερικές διαφορικές εξισώσεις. Παραδείγματα αποτελούν οι ταλαντώσεις στερεών σωμάτων, η ροή ρευστών, η διάχυση χημικών ουσιών, η διάδοση θερμότητας, η δομή των μορίων, οι αλληλεπιδράσεις φωτονίων και ηλεκτρονίων, και η ακτινοβολία ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις παίζουν επίσης κεντρικό ρόλο στα σύγχρονα Μαθηματικά, ιδιαίτερα στη γεωμετρία και την ανάλυση. Η ύπαρξη ισχυρών ηλεκτρονικών υπολογιστών βαθμιαία μετατοπίζει την έμφαση στις μερικές διαφορικές εξισώσεις από την αναλυτική επίλυσή τους προς την αριθμητική επίλυση και την ποιοτική θεωρία.

Το παρόν βιβλίο αποτελεί μια εισαγωγή στις βασικές ιδιότητες των μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) και τις τεχνικές που αποδείχθηκαν χρήσιμες στη μελέτη τους. Σκοπός μου είναι να προσφέρω στον φοιτητή μια ευρεία προοπτική για αυτό το γνωστικό αντικείμενο, να αποτυπώσω την πλούσια ποικιλία φαινομένων που περιλαμβάνει, και να μεταδώσω μια λειτουργική γνώση των πιο σημαντικών τεχνικών επίλυσης των εξισώσεων.

Μία από τις σπουδαιότερες τεχνικές επίλυσης είναι η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών. Σε πολλά συγγράμματα δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε αυτή την τεχνική με αποτέλεσμα να παραλείπονται άλλες θεωρήσεις. Το πρόβλημα με αυτή την προσέγγιση είναι ότι μέσω αυτής της τεχνικής μπορούν να λυθούν μόνο συγκεκριμένα είδη μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σε αυτό το βιβλίο η τεχνική αυτή παίζει σημαντικό ρόλο, αλλά δεν επισκιάζει τις υπόλοιπες μεθόδους. Σε άλλα συγγράμματα, όπου παρουσιάζονται σχετικά προχωρημένες θεωρητικές ιδέες, απαιτείται από τον μέσο προπτυχιακό φοιτητή υπερβολικά μεγάλη μαθηματική γνώση. Εδώ προσπάθησα να ελαχιστοποιήσω τις προχωρημένες έννοιες και τη μαθηματική ιδιόλεκτο. Ωστόσο, επειδή οι μερικές διαφορικές εξισώσεις βρίσκονται στην αιχμή της έρευνας στη σύγχρονη επιστήμη, δεν έχω διστάσει να αναφέρω προχωρημένες ιδέες ως θέματα, στα οποία μπορεί να εμβαθύνει ο ανήσυχος φοιτητής.

Το παρόν βιβλίο απευθύνεται σε προπτυχιακούς φοιτητές. Έχει σχεδιασθεί για τριτοετείς και τεταρτοετείς φοιτητές Φυσικής, Μαθηματικών, ή Πολυτεχνικών Σχολών. Οι μεταπτυχιακοί φοιτητές, ειδικότερα της Φυσικής, ασφαλώς μπορούν να μάθουν από αυτό, αλλά με κανένα τρόπο δεν αποτελεί μεταπτυχιακό σύγγραμμα.

Το κύριο προαπαιτούμενο είναι η στέρεη γνώση απειροστικού λογισμού, ειδικότερα πολλών μεταβλητών. Στα άλλα προαπαιτούμενα συγκαταλέγονται κάποιες γνώσεις συνήθων διαφορικών εξισώσεων και γραμμικής άλγεβρας σε έκταση αρκετά μικρότερη εκείνης ενός εξαμηνιαίου μαθήματος. Ωστόσο, επειδή το αντικείμενο των μερικών διαφορικών εξισώσεων από την ίδια τη φύση του δεν είναι εύκολο, στους δικούς μου φοιτητές συστήνω να έχουν ήδη παρακολουθήσει προηγούμενως πλήρη εξαμηνιαία μαθήματα στα δύο αντικείμενα που προανέφερα.

Η παρουσίαση της ύλης βασίζεται στις ακόλουθες αρχές. Παίρνουμε το κίνητρο από τη Φυσική αλλά στη συνέχεια κάνουμε Μαθηματικά. Εστιάζουμε στις τρεις κλασικές εξισώσεις: όλες οι σημαντικές ιδέες μπορούν να κατανοηθούν με τη βοήθειά τους. Μελετάμε την περίπτωση μίας χωρικής διάστασης προτού προχωρήσουμε σε δύο και τρεις διαστάσεις με τις πιο περίπλοκες γεωμετρίες τους. Λύνουμε προβλήματα χωρίς σύνορα προτού εισάγουμε συνοριακές συνθήκες (Με την ολοκλήρωση του Κεφαλαίου 2, ο φοιτητής θα διαθέτει ήδη μια τόσο διαισθητική όσο και αναλυτική κατανόηση απλών κυματικών φαινομένων και φαινομένων διάχυσης). Δεν διστάζουμε να παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα χωρίς απόδειξη, ωστόσο παρέχουμε τις πιο σημαντικές αποδείξεις. Παρουσιάζουμε σε εισαγωγικό επίπεδο μια ποικιλία από σημαντικά προχωρημένα θέματα.

Το βιβλίο αυτό περιέχει αρκετό υλικό για ένα ετήσιο μάθημα. Ένα αρκετά χαλαρό εξαμηνιαίο μάθημα μπορεί να καλυφθεί από τις ενότητες με αστερίσκο στα Κεφάλαια 1-6. Για ένα πιο φιλόδοξο εξαμηνιαίο μάθημα οι βασικές ενότητες με αστερίσκο μπορούν να συμπληρωθούν με διάφορους τρόπους. Οι ενότητες χωρίς αστερίσκο στα Κεφάλαια 1-6 μπορούν να διδαχθούν κατά βούληση. Μια υπολογιστική έμφαση μετά από τις ενότητες με αστερίσκο μπορεί να δοθεί από την αριθμητική ανάλυση στο Κεφάλαιο 8. Για τη συνέχιση του χωρισμού των μεταβλητών μετά από το Κεφάλαιο 6, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το Κεφάλαιο 10. Για φοιτητές Φυσικής είναι δυνατός κάποιος συνδυασμός των Κεφαλαίων 9, 12, 13 και 14. Ένα παραδοσιακό μάθημα προβλημάτων συνοριακών τιμών μπορεί να καλυφθεί από τα κεφάλαια 1, 4, 5, 6 και 10.

Κάθε κεφάλαιο διαιρείται σε ενότητες που συμβολίζονται με Α.Β. Μια εξίσωση με αριθμό (Α.Β.Γ.) αναφέρεται στην εξίσωση Γ της ενότητας Α.Β. Κάθε αναφορά στην εξίσωση (Γ) αναφέρεται στην εξίσωση της ίδιας ενότητας. Παρόμοιο σύστημα χρησιμοποιείται για την αρίθμηση θεωρημάτων και ασκήσεων. Οι βιβλιογραφικές παραπομπές υποδηλώνονται με αγκύλες, π.χ. [AS].

Θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους συναδέλφους μου για τη βοήθειά τους. Ειδικότερα ευχαριστώ τους Yue Liu και Brian Loe για την εκτεταμένη βοήθειά τους στις ασκήσεις, καθώς και τους Κώστα Δαφέρμο, Bob Glassey, Jerry Goldstein, Μάνο Γρυλλάκη, Yan Guo, Chris Jones, Keith Lewis, Gustavo Perla Menzala και Bob Seeley για τις υποδείξεις και τις διορθώσεις που έκαναν.

Walter A. Strauss

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ

Στα χρόνια που παρήλθαν από την πρώτη έκδοση, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις απέκτησαν ακόμη πιο εξέχοντα ρόλο τόσο ως μοντέλο για επιστημονικές θεωρίες όσο και γενικά εντός των Μαθηματικών. Στη δεύτερη έκδοση πρόσθεσα 30 νέες ασκήσεις. Επιπλέον, η παρούσα έκδοση συνοδεύεται από ένα παράρτημα λύσεων που περιέχει λεπτομερώς επεξεργασμένες απαντήσεις σε περίπου τις μισές ασκήσεις του βιβλίου. Πρόσθεσα μία νέα ενότητα περί υδάτινων κυμάτων, καθώς και νέο υλικό και επεξηγηματικά σχόλια σε πολλά σημεία. Όπου κρίθηκε αναγκαίο έγιναν διορθώσεις.

Δράττομαι της ευκαιρίας να ευχαριστήσω όλους όσους επεσήμαναν σφάλματα στην πρώτη έκδοση ή έκαναν χρήσιμες υποδείξεις, συμπεριλαμβανομένων των Andrew Bernoff, Rustum Choksi, Adrian Constantin, Leonid Dickey, Julio Dix, Craig Evans, A. M. Fink, Robert Glassey, Jerome Goldstein, Leon Greenberg, Chris Hunter, Eva Kallin, Jim Kelliher, Jeng-Eng Lin, Howard Liu, Jeff Nunemacher, Βασίλη Παπανικολάου, Mary Pugh, Stan Richardson, Stuart Rogers, Paul Sacks, Naoki Saito, Stephen Simons, Catherine Sulem, David Wagner, David Weinberg και Nick Zakrasek. Οι θερμότερες ευχαριστίες μου απευθύνονται στους Julie και Steve Levandosky που, εκτός του ότι υπήρξαν συν-συγγραφείς στο παράρτημα των λύσεων, έκαναν πολλές υποδείξεις και είχαν πολλές ιδέες αναφορικά με το κείμενο καθεαυτό.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

Ο Τομέας Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, αναλαμβάνοντας την πρωτοβουλία της μετάφρασης του βιβλίου «PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, An Introduction» του Walter A. Strauss, φέρνει στον ελληνικό ακαδημαϊκό χώρο ένα σημαντικό βιβλίο στην περιοχή των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Το βιβλίο του Strauss καλύπτει, με εξαιρετικό ύφος, μια περιοχή των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή των εφαρμογών, καθώς αποτελεί το κατ'εξοχήν εργαλείο μοντελοποίησης φυσικών διαδικασιών, προβλημάτων που ανακύπτουν στην τεχνολογία, αλλά και ευρύτερα στον χώρο των θετικών επιστημών. Το περιεχόμενο του βιβλίου παρουσιάζει ευρύτητα και καλύπτει πλείστες όσες πλευρές του σημαντικού αυτού αντικείμενου, ποικίλης δυσκολίας. Η παρουσίαση είναι μοναδική, διότι με την έμφαση στις τρεις κλασικές εξισώσεις, την εξίσωση Laplace, την κυματική εξίσωση και την εξίσωση της θερμότητας, δίνεται η δυνατότητα στον αναγνώστη να αντλήσει ενδιαφέρουσες ιδέες για την κατανόηση πολυπλοκότερων προβλημάτων. Ο συγγραφέας επιλέγει να παραθέσει όλες τις κλασικές τεχνικές επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων, χωρίς όμως αυτές να κυριαρχούν στο βιβλίο, ενώ παράλληλα εισάγει τον αναγνώστη και σε πιο προχωρημένα θέματα. Τόσο προβλήματα χωρίς σύνορο όσο και συνοριακά προβλήματα, η προσέγγιση του χωρισμού των μεταβλητών, οι ταυτότητες Green και οι συναρτήσεις Green, η μελέτη των σειρών Fourier και των ποιοτικών χαρακτηριστικών τους, κυματικά φαινόμενα με ενεργειακά επιχειρήματα, προβλήματα ιδιοτιμών για τυχαία χωρία, η αρχή ελαχίστου-μεγίστου, η καταγραφή της πληρότητας και των ασυμπτωτικών ιδιοτήτων των ιδιοτιμών προβλημάτων συνοριακών τιμών, μια εισαγωγή στη θεωρία κατανομών και μια εκ νέου θεώρηση των συναρτήσεων Green, προβλήματα από τη Φυσική και τέλος μια άκρως ενδιαφέρουσα εισαγωγή σε μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, κρουστικά κύματα και σολιτόνια, από τα πιο βασικά αντικείμενα έως τα πιο προχωρημένα, όλα παρουσιάζονται με διδακτικό τρόπο. Σε ολόκληρο το βιβλίο, ο συγγραφέας κρατά στενή επαφή με το φυσικό πρόβλημα. Οι αποδεικτικές διαδικασίες είναι απόλυτα κατανοητές, καθώς δίνεται έμφαση στην αποσαφήνιση της λογικής που οδηγεί στην υιοθέτηση των ακολουθούμενων στρατηγικών. Η αμεσότητα της γραφής, που πολλές φορές μοιάζει με προφορικό λόγο, προσδίδει στο κείμενο μια ζωντάνια που συνεπαίρνει τον αναγνώστη και τον κάνει κοινωνό μιας «διάλεξης» του συγγραφέα, σαν αυτές τις άκρως παιδαγωγικές και ενδιαφέρουσες του χαρισματικού δασκάλου, όπως μαρτυρούν οι μαθητές του. Η διεξοδική εξέταση των θεμάτων από διάφορες οπτικές και το ξανακοίταγμά τους με ανεκτικό βαθμό δυσκολίας, συμβάλλουν στην ουσιαστική κατανόηση των εννοιών.

Όπως τονίζει ο συγγραφέας, το υλικό του βιβλίου απευθύνεται κυρίως σε προπτυχιακούς φοιτητές, ωστόσο μέρος του βιβλίου μπορεί να φανεί, λόγω της υψηλής εμπέδυνσης στη θεώρηση των γνωστικών αντικειμένων, εξαιρετικά χρήσιμο και σε μεταπτυχιακούς φοιτητές. Γνωρίζοντας καλά τα προγράμματα σπουδών των πανεπιστημίων μας, πιστεύω ότι μια κατάλληλη επιλογή κεφαλαίων του βιβλίου μπορεί πράγματι να αποτελέσει το υλικό ενός βασικού εξαμηνιαίου προπτυχιακού μαθήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων, ενώ μια διαφορετική επιλογή κεφαλαίων μπορεί να αποτελέσει την ύλη για ένα προχωρημένο προπτυχιακό μάθημα κατάλληλο για φοιτητές μαθηματικών σχολών.

Έχοντας την ευθύνη του συντονισμού της προσπάθειας αυτής θα ήθελα να σας μεταφέρω τον ενθουσιασμό όλων όσοι δουλέψαμε για την πραγμάτωση αυτού του εγχειρήματος. Πηγή του ενθουσιασμού μας ήταν ότι αφενός δουλέψαμε πάνω σε ένα εξαιρετο κείμενο και αφετέρου ότι επαναλάβαμε μια, ήδη δοκιμασμένη, άσογη συνεργασία. Όλοι οι συμμετέχοντες σ' αυτό το εγχείρημα είχαμε την εμπειρία προηγούμενης μεταφραστικής δουλειάς που μας είχε ανατεθεί από τον Τομέα Μαθηματικών στην περιοχή των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Ο κ. Θεοφάνης Γραμμένος, επικ. καθηγητής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και η κ. Αδρομάχη Σπανού, δρ. φυσικός, ανέλαβαν το βάρος της μετάφρασης, ενώ η κ. Σπανού ανέλαβε επιπλέον το απαιτητικό έργο της πλήρους γραφής και ηλεκτρονικής στοιχειοθεσίας του κειμένου σε κώδικα \LaTeX . Η ηλεκτρονική στοιχειοθεσία οδήγησε σε άρτιο αισθητικό αποτέλεσμα με την ανιδιοτελή συμβολή του Απόστολου Συρόπουλου, ο οποίος, εκτός των όσων έχει προσφέρει στην ελληνική κοινότητα των χρηστών του κώδικα \LaTeX , μας βοήθησε καθοριστικά στην ηλεκτρονική σχεδίαση του βιβλίου. Την επιστημονική επιμέλεια του κειμένου είχαμε ο κ. Δρόσος Γκιντίδης, αν. καθηγητής του ΕΜΠ κι εγώ. Μεταφραστές και επιμελητές συνδεόμαστε φιλικά πολλά χρόνια, έχουμε κοινό ερευνητικό έργο και συνεργαζόμαστε απολαμβάνοντας τη διεξοδική συζήτηση, την ανταλλαγή απόψεων και τη λεπτομερειακή ανάλυση. Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μας στην κα Άννα Τσαχουρίδου από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ για τη βοήθεια που μας προσέφερε στα σχήματα του βιβλίου.

Η δαπάνη έκδοσης του βιβλίου καλύφθηκε από το «Κληροδότημα Χριστού Παπακυριακόπουλου». Ο διακεκριμένος Έλληνας μαθηματικός που άφησε όλη την περιουσία του στο ΕΜΠ, αποτελεί πρότυπο αξιών και προσφοράς. Ο Τομέας Μαθηματικών διαχειριζόμενος το Κληροδότημα, από τα έσοδα της περιουσίας και από την κυκλοφορία των συγγραμμάτων που εκδίδει, απόλυτα προσηλωμένος στο όραμα του δωροθέτη, χορηγεί υποτροφίες αριστείας σε προπτυχιακούς φοιτητές και υποψήφιους διδάκτορες και υποστηρίζει ερευνητικές δραστηριότητες του Τομέα Μαθηματικών.

Έχοντας διδάξει για πολλά χρόνια το αντικείμενο των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε βασικό και προχωρημένο προπτυχιακό επίπεδο, καθώς και σε μεταπτυχιακό επίπεδο, είμαι ιδιαίτερα ευτυχής που με αυτή την προσπάθεια δίνουμε στους φοιτητές μας, αλλά και σε κάθε ενδιαφερόμενο αναγνώστη, την ευκαιρία να μάθουν, να εμβαθύνουν σε αυτή τη σημαντική περιοχή των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών με οδηγό ένα τόσο καλό, διεθνώς αναγνωρισμένο, μοναδικό σύγγραμμα.

Κυριακή Κυριάκη, καθηγήτρια
Τομέας Μαθηματικών, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ
Απρίλιος 2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

(Οι ενότητες με αστερίσκο αποτελούν το βασικό μέρος του βιβλίου)

Κεφάλαιο 1/Πώς προκύπτουν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις	
1.1* Τι είναι μια μερική διαφορική εξίσωση;	1
1.2* Γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης	6
1.3* Ροές, ταλαντώσεις και διαδικασίες διάχυσης	10
1.4* Αρχικές και συνοριακές συνθήκες	20
1.5 Καλά τοποθετημένα προβλήματα	26
1.6 Είδη εξισώσεων δεύτερης τάξης	29
Κεφάλαιο 2/Κύματα και διαδικασίες διάχυσης	
2.1* Η κυματική εξίσωση	35
2.2* Αιτιότητα και ενέργεια	41
2.3* Η εξίσωση διάχυσης	44
2.4* Διάχυση σε ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών αριθμών	49
2.5* Σύγκριση κυμάτων και διαδικασιών διάχυσης	56
Κεφάλαιο 3/Ανακλάσεις και πηγές	
3.1 Διάχυση στην ημιευθεία των πραγματικών αριθμών	59
3.2 Ανακλάσεις κυμάτων	63
3.3 Διάχυση με πηγή	69
3.4 Κύματα με πηγή	73
3.5 Μια εκ νέου θεώρηση της διάχυσης	83
Κεφάλαιο 4/Συνοριακά προβλήματα	
4.1* Χωρισμός των μεταβλητών, η συνθήκη Dirichlet	87
4.2* Η συνθήκη Neumann	92
4.3* Η συνθήκη Robin	95
Κεφάλαιο 5/Σειρές Fourier	
5.1* Οι συντελεστές	107
5.2* Άρτιες, περιττές, περιοδικές και μιγαδικές συναρτήσεις	115
5.3* Ορθογωνιότητα και γενικές σειρές Fourier	121

5.4*	Πληρότητα	128
5.5	Πληρότητα και το φαινόμενο Gibbs	140
5.6	Μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες	151

Κεφάλαιο 6/Αρμονικές συναρτήσεις

6.1*	Η εξίσωση Laplace	157
6.2*	Ορθογώνια και κύβοι	166
6.3*	Ο τύπος του Poisson	170
6.4	Κύκλοι, κυκλικοί τομείς και δακτύλιοι	177

(Μπορείτε να μελετήσετε τα επόμενα τέσσερα κεφάλαια με οποιαδήποτε σειρά)

Κεφάλαιο 7/Ταυτότητες Green και συναρτήσεις Green

7.1	Πρώτη ταυτότητα Green	183
7.2	Δεύτερη ταυτότητα Green	190
7.3	Συναρτήσεις Green	193
7.4	Ημιχώρος και σφαίρα	196

Κεφάλαιο 8/Αριθμητικός υπολογισμός λύσεων

8.1	Δυνατότητες και κίνδυνοι	205
8.2	Προσεγγίσεις σε διαδικασίες διάχυσης	209
8.3	Προσεγγίσεις σε κύματα	217
8.4	Προσεγγίσεις στην εξίσωση Laplace	225
8.5	Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων	230

Κεφάλαιο 9/Κύματα στον χώρο

9.1	Ενέργεια και αιτιότητα	235
9.2	Η κυματική εξίσωση στον χωρόχρονο	242
9.3	Ακτίνες, ιδιομορφίες και πηγές	250
9.4	Η εξίσωση διάχυσης και η εξίσωση Schrödinger	256
9.5	Το άτομο του υδρογόνου	262

Κεφάλαιο 10/Σύνορα στο επίπεδο και τον χώρο

10.1	Μια εκ νέου θεώρηση της μεθόδου Fourier	267
10.2	Ταλαντώσεις επίπεδης μεμβράνης τυμπάνου	273
10.3	Χωρικές ταλαντώσεις σε σφαίρα	279
10.4	Κόμβοι	287
10.5	Συναρτήσεις Bessel	290
10.6	Συναρτήσεις Legendre	297
10.7	Στροφορμή στην κβαντική μηχανική	302

Κεφάλαιο 11/Γενικά προβλήματα ιδιοτιμών

11.1	Οι ιδιοτιμές είναι ελάχιστα της δυναμικής ενέργειας	307
11.2	Υπολογισμός ιδιοτιμών	312
11.3	Πληρότητα	317
11.4	Συμμετρικοί διαφορικοί τελεστές	322
11.5	Πληρότητα και χωρισμός των μεταβλητών	325
11.6	Ασυμπτωτική συμπεριφορά των ιδιοτιμών	329

Κεφάλαιο 12/Κατανομές και μετασχηματισμοί

12.1	Κατανομές	339
12.2	Μια εκ νέου θεώρηση των συναρτήσεων Green	346
12.3	Μετασχηματισμοί Fourier	351
12.4	Συναρτήσεις πηγής	357
12.5	Τεχνικές μετασχηματισμού Laplace	361

Κεφάλαιο 13/Προβλήματα ΜΔΕ από τη Φυσική

13.1	Ηλεκτρομαγνητισμός	367
13.2	Ρευστά και ακουστική	371
13.3	Σκέδαση	375
13.4	Συνεχές φάσμα	380
13.5	Εξισώσεις στοιχειωδών σωματιδίων	383

Κεφάλαιο 14/Μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις

14.1	Κρουστικά κύματα	389
14.2	Σολιτόνια	399
14.3	Λογισμός των μεταβολών	406
14.4	Θεωρία διακλαδώσεων	410
14.5	Υδάτινα κύματα	416

Παράρτημα

A.1	Συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις	423
A.2	Σειρές συναρτήσεων	427
A.3	Διαφόριση και ολοκλήρωση	429
A.4	Διαφορικές εξισώσεις	433
A.5	Η συνάρτηση Γάμμα	434

Βιβλιογραφία

437

Απαντήσεις και υποδείξεις σε επιλεγμένες ασκήσεις

441

Ευρετήριο

457